



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: 2023

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللمس، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ: 2 ، 3-
 وخمس كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2- وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 2
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:
 A " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ، B " الحصول على الألوان الثلاثة "

C " الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم "

(1) أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ثم بيّن أنّ: $P(C) = \frac{3}{20}$

ب) احسب $P(A \cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$

(2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصّل عليها.

عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

(3) نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبارجاع.

احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

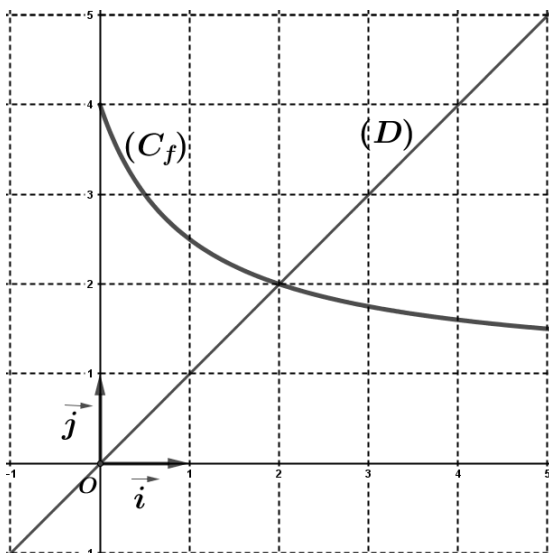
(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ:

$u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على حامل محور

الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)





(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

$$(2) \quad (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

(ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $u_n = -2 + \frac{4}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n , $T_n = \frac{1}{16} \left[4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة $(E) \dots 16x + 361y = 818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

(أ) تحقّق أنّ الثنائية $(2; 6)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

(ب) عيّن كلّ الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $|x + 23y| \leq 4$

(2) P عدد طبيعي يُكتب $5\alpha\beta 0$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويكتب $\beta\alpha 87$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث α و β عدنان طبيعيان.

عيّن α و β ثمّ اكتب P في النظام العشري.

(3) (أ) حلّ العدد 2023 إلى جُداء عوامل أولية ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023

(ب) نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^2 + 3d^2 = 2023$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (6x - 3)e^{-2x}$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(2) (أ) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,2 < \alpha < 0,3$

(ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$



(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 - 3xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (وحدة الطول 2cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(2) أ) بين أنه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(-x)$

ب) استنتج أن f متزايدة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) أثبت أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ارسم (Δ)، (T) و (C_f) على $]-\infty; \frac{1}{2}]$ (نأخذ: $f(0,25) \approx 0$ ، $f(-1,3) \approx 0$ و $f(-\alpha) \approx 1,2$)

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين بالضبط.

(4) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^0 xe^{2x} dx$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربع المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها

$$x = 0 \text{ و } x = -\alpha, \quad y = x + 1$$

ج) تحقّق أن $\mathcal{A} = 2 \left(\frac{4\alpha - 1}{2\alpha - 1} \right) cm^2$



الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على كرتين حمراوين وكرتين خضراوين، ويحتوي صندوق V على كرتين حمراوين وثلاث كريات خضراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 10

إذا حصلنا على عدد أولي نسحب الكرتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكرتين من V

(1) نعتبر الحوادث A ، B و C الآتية:

A " سحب كرتين حمراوين " ، B " سحب كرتين خضراوين " و C " سحب كرتين من لونين مختلفين "
(أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

(ب) بين أنّ $P(A) = \frac{19}{150}$ و $P(B) = \frac{37}{150}$ ثم استنتج $P(C)$

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكرتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

(أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

(ب) احسب احتمال الحدث: " $\ln X \leq 1$ "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(\bar{z} - 1 + i\sqrt{3})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C

التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A = \sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$

(أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل المثلثي.

(ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(3) نضع: $K = \frac{z_C}{2z_A}$

(أ) احسب طولية العدد المركب K وعمدة له ثم اكتبه على الشكل الجبري.

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(4) n عدد طبيعي، نضع: $L_n = z_A^n + z_B^n$

بين أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد المركب L_n حقيقي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) (أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة

الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11



(ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

(ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$

(3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3)$

(4) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0[11]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x-3)\ln x + x$

(1) (أ) احسب من أجل كلّ x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x)$ و $g''(x)$

(ب) بيّن أنّ الدالة g' متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

(2) (أ) بيّن أنّ المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

(ب) علما أنّ $g(\alpha) \approx 0,85$ ، استنتج أنّه: من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\ln x\right)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm)

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f

(3) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

(4) (أ) ارسم (T) ، (T') و (C_f) (نأخذ : $f(6) \approx 5,9$)

(ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ ثلاثة حلول بالضبط.

(5) F الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{3}{2}x(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x^2 - 3x$

(أ) تحقّق أنّ F أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

(ب) استنتج بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها

$x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$