



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7
ب- بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $6^{2n} \equiv 1[7]$ ، ثمّ استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7
- (2) بيّن أنّ العدد $2 - (2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954}$ يقبل القسمة على 7
- (3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
أ- استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7
ب- بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$
ج- أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$ ، ثمّ استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل في كلّ حالة من الحالات التالية:
- (1) α و β عدنان حقيقيان غير معدومين. (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان بـ :
 $u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $5u_{n+1} = u_n + \alpha$ و $v_n = u_n + \beta$
- المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -4\beta$
- (2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \ln \sqrt{e^{n \cdot \ln 2}}$ هي متتالية حسابية أساسها $\ln \sqrt{2}$
- (3) x عدد صحيح. إذا كان $x \equiv 3[7]$ و $x \equiv 1[3]$ فإنّ $x \equiv 3[21]$
- (4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ دالة فردية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- f الدالة العددية المعرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{2x + 1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل المرفق.
- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

ب- انقل الشكل ومثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 وضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n)

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < 5$

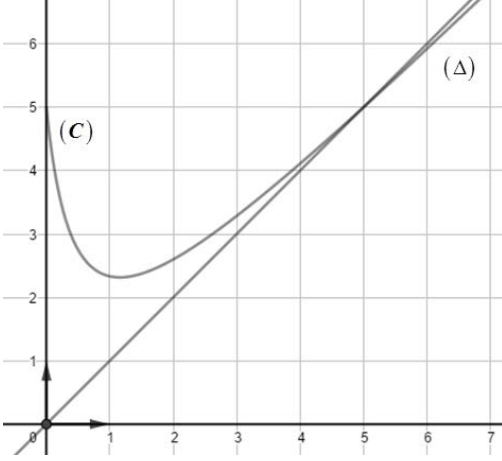
ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$5 - u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} (5 - u_n)$$

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{2u_n}{2u_n + 1} \leq \frac{10}{11}$

ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ثم احسب $0 < 5 - u_n \leq 3 \left(\frac{10}{11} \right)^n$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty; 1[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x - 1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x - x > 0$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 1[$ ، $f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - x)}{(x-1)^2}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x - 1$

(4) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0

(5) أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب- أنشئ (T) ، (Δ) و (C)

(6) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد إشارة حلول المعادلة: $\frac{e^x - x^2 + x - 1}{x - 1} = mx$

(7) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = \frac{|e^x - x^2|}{x - 1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم أنشئ (C_g)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي. نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

(1) أ- بين أن $\text{pgcd}(A_n; B_n) = \text{pgcd}(B_n; 7)$

ب- استنتج القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(A_n; B_n)$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما.

(2) نعتبر المعادلة $A_2x - B_2y = 29 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[4]$

ب- عين حلول المعادلة (E)

(3) أ- استنتج حلول المعادلة $51x - 4y = 45 \dots (E')$

ب- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والموجبة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{ax}{x+b} + \ln(x+b)$

حيث a و b عدنان حقيقيان مع b موجب تماماً. تمثيلها البياني (C) في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يقبل حامل محور الفواصل مماساً له في النقطة O

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ، $f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$

(2) g الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$

أحسب $g'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \int_{n-1}^n f(x)dx$

أ- أحسب u_{2022} ثم فسّر النتيجة بيانياً.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المرفقتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}$ و $v_n = u_n - 1$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = -\frac{1}{3}(v_n)^2$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq v_n < 0$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أن (v_n) متقاربة.

(4) (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n = \ln\left(-\frac{3}{v_n}\right)$

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدّها الأول w_0

ب- أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \dots \times \frac{1}{v_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x + \ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة h

(2) أ- بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$

ب- استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - x \ln x + (\ln x)^2$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً ، $f'(x) = \frac{(2-x)h(x)}{x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha(\alpha+2)$ ثم عيّن حصرًا لـ $f(\alpha)$

(4) g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g واحسب $g(1)$

ب- بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها.

ج- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C) في النقطة A

(5) أنشئ (T) و (C) في المجال $]0; 5]$

(6) k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = f(e^{-x})$

أ- دون حساب عبارة $k(x)$ ، ادرس اتجاه تغير الدالة k ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة k