



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

### الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

#### التمرين الأول: (04 نقاط)

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-\infty; 1[$  بـ :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

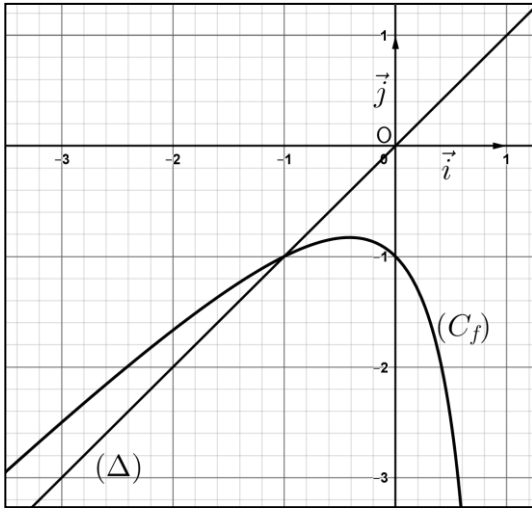
$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها الاول  $u_0 = -3$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

ليكن  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  و  $(\Delta)$  هو المستقيم ذو

المعادلة  $y = x$  (أنظر الشكل المقابل).



(1) أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  على محور الفواصل دون حسابها مبرزا

خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-3 \leq u_n < -1$

(3) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} + 1 \geq \frac{3}{4}(u_n + 1)$

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n + 1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$  ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_n + 1) \leq 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$

واستنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقطتين  $A(1;1;3)$  و  $B(1;0;2)$  .

(1) أ) بيّن أنّ النقط  $O$  ،  $A$  و  $B$  ليست في استقامية.

ب) تحقق أنّ  $\vec{n}(2;1;-1)$  شعاع ناظمي للمستوي  $(OAB)$  ثم عيّن معادلة ديكرتية له.

(2) لتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي إحداثياتها  $(x;y;z)$  وتحقق المعادلة التالية:

$$(2x+2y+6z-11)^2 + (2x+4z-5)^2 = 0$$

- بيّن أنّ المجموعة  $(\Delta)$  هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين  $[OA]$  و  $[OB]$  ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمجموعة  $(\Delta)$ .

(3) لتكن  $M$  نقطة كيفية من الفضاء

- برهن صحة التكافؤ التالي:  $(M \in (\Delta))$  يكافئ  $(OM = AM = BM)$  ثم استنتج إحداثيات النقطة  $\Omega$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $OAB$ .

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ،  $\theta$  عدد حقيقي من المجال  $]-\pi; \pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin \theta)z + 1) = 0$$

II.  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = \sin \theta + i \cos \theta \text{ ، } z_B = 1 - i \text{ ، } z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ (يرمز } \bar{z}_c \text{ الى مرافق } z_c \text{)}$$

(1) اكتب الأعداد  $z_D$  ،  $z_C$  ،  $z_B$  ،  $z_A$  على الشكل الأسّي.

(2) نقطة  $E$  من المستوي لاحقتها  $z_E$  حيث  $z_E = \frac{z_A}{z_B}$ .

- بيّن أن النقط  $C$  ،  $D$  و  $E$  تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه النقطة  $A$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$  ونسبته  $(2\sqrt{2}-2)$ .

- عيّن قيمة  $\theta$  حتى تكون النقطة  $B$  صورة النقطة  $C$  بالتشابه المباشر  $S$ .

(4) نضع  $\theta = \frac{-3\pi}{4}$ . عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون العدد  $(z_D)^n$  تخيليا صرفا.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}; & x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad f \text{ الدالة العددية المعرفة على } [0;1[ \cup ]1;+\infty[ : \text{ب}$$

(يرمز بـ  $\ln$  الى اللوغاريتم النيبيري)

( $C_f$ ) التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ/ بيّن أنّ  $f$  مستمرة عند 0 بقيم أكبر.

ب/ احسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) أ/ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

ب/ ادرس اتجاه تغيير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً ( $\Delta$ ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية ( $C_f$ ) بالنسبة الى ( $\Delta$ ).

(4) بيّن أنّ المنحنى ( $C_f$ ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة  $\omega$  فاصلتها  $\alpha$  حيث  $1,49 < \alpha < 1,5$

ثم بيّن أنّ معادلة المماس للمنحنى ( $C_f$ ) في النقطة  $\omega$  تكتب على الشكل  $y = \left( \alpha + 3 + \frac{1}{\alpha} \right) (x - \alpha)$

(5) ارسم المستقيم ( $\Delta$ ) و المنحنى ( $C_f$ ).

(6)  $h$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ :  $h(x) = 1 - x + x \ln x$ .

أ/ بيّن أنّ الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$  و استنتج إشارة  $h(x)$  على المجال  $[1; +\infty[$ .

ب/ بيّن أنّه من أجل كل  $x > 1$  :  $f(x) - x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{h(x)}{x \ln x}$

و استنتج أنّه من أجل  $x > 1$  :  $x - \frac{1}{x \ln x} < f(x) < x + 1$

(7)  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز من المستوى المحدّد بالمنحنى ( $C_f$ ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما :  $x = \alpha$  و  $x = e$ . (هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

- بيّن أنّ  $\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha + 1) < \mathcal{A} < \frac{1}{2}(e - \alpha)(e + \alpha + 2)$ .

## الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

### التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(1) \quad \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان طبيعيان بحيث: } \begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

- عيّن العددين  $\alpha$  و  $\beta$ ، ثم بيّن أنّ العددين  $\frac{\alpha}{2}$  و  $\beta$  أوليان فيما بينهما.

$$(2) \quad \text{عيّن كل الثنائيات الصحيحة } (x, y) \text{ التي تحقق المعادلة: } 1009x - 2017y = 1$$

$$(3) \quad \text{عيّن الأعداد الصحيحة } a \text{ التي تحقق الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$$

$$(4) \quad \text{أ) } n \text{ عدد طبيعي، ادرس تبعا لقيم } n \text{ بواقي القسمة الاقليدية للعدد } 7^n \text{ على } 9.$$

$$\text{ب) } L \text{ عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس } 7 \text{ كما يلي: } L = \underbrace{111\dots 1}_{2018 \text{ مرة}}$$

- عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد  $L$  على 42.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3، 2، 3 وكريه بيضاء مرقمة بـ: -1- نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحوادث التالية:

A : "الحصول على أربع كريات من نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي  $X$  ثم عرّف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$ .

ج) احسب احتمال الحادثة: " $X^2 - X > 0$ ".

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1)  $m$  عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:

$$z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0 \dots (E)$$

- عيّن قيم العدد الحقيقي  $m$  التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

(2) نضع  $m=3$ ، حل المعادلة (E).

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  النقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $E$  التي

لاحقاتها  $z_A = -2+i$ ،  $z_B = -2-i$ ،  $z_C = \alpha$  و  $z_E = \sqrt{3}$ ، حيث  $\alpha$  عدد حقيقي و  $\alpha > -2$ .  
- بين أن قيمة  $\alpha$  التي يكون من أجلها المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع هي  $(-2+\sqrt{3})$ .  
- نضع في كل ما يأتي  $z_C = -2+\sqrt{3}$ :

(4) اكتب العدد المركب:  $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$  على الشكل الأسّي ثم استنتج أن:

(أ) المستقيمان  $(AB)$  و  $(EC)$  متعامدان.

(ب) النقاط  $A$ ،  $B$  و  $E$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(\gamma)$  التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(5) ليكن  $r$  الدوران الذي يحول النقطة  $B$  إلى  $C$  و يحول  $C$  إلى  $A$ ، عبارته المركبة هي:

$$z' = az + \left( \frac{\sqrt{3}-6}{2} \right) + i \left( \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \right)$$

(أ) احسب العدد المركب  $a$  ثم استنتج زاوية الدوران  $r$ .

(ب) تحقق أن النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  هي مركز الدوران  $r$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$ .

(1) بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0.9 < \alpha < 1$ ،

و استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

II. الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ .

و  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(ب) بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x) = -1$  (يمكن وضع  $t = -\frac{1}{x}$ ) ثم استنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$

مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

(3) الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$ .

أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  وادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  واستنتج إشارة  $h(x)$  على  $]0; +\infty[$ .

ب) تَحَقَّقْ أَنْ  $f(x) - x = (1+x)h(x)$  ثم استنتج الوضعية النسبية لـ  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

(4) ارسم المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$ . (نأخذ  $f(\alpha) \approx 1.73$ ).

(5)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  بجدها العام  $u_n$  حيث:  $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ .

أ) اكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم بيّن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $u_1$ .

ب) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$