

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 نعتبر النقطتين $A(-1;1;-2)$ و $B(1;-3;-4)$ والمستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيط $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t - 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$
 وليكن (Δ') المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع توجيه له .
 (1) بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
 (2) ليكن (P) المستوي المعين بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .
 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له .
 (3) نسمي (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $AM^2 + BM^2 = 20$.
 بين أن (S) سطح كرة مركزها منتصف القطعة $[AB]$ ونصف قطرها 2 .
 (4) حدد الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (S) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) نعتبر المعادلة : $104x - 20y = 272 \dots\dots\dots (E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عدنان صحيحان .
 أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حولا.
 ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .
 (2) λ عدد طبيعي يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $1\alpha\beta 01$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عدنان طبيعيان .
 عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .
 (3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:
 $2m - d = 2017$ حيث $d = PGCD(a;b)$ ، $m = PPCM(a;b)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = 2(1-i)$.
- (أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا .

- (ج) نسمّي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يسمح $\mathbb{R}_+$ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وأنشئ (Γ) .
- (3) الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2 .
- عيّن طبيعة التحويل $h \circ r$ وعناصره المميّزة ، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h \circ r$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$.
- (1-أ) (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له.
- (ب) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ،
- ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (2) اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .
- (3) الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0; +\infty[$.
- (4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.
- (5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $f(x) = m(x-2) \dots (E)$ ناقش بيانها حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .
- (6) g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب : $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة g .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

(1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S'_n و S_n .

ب) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.

(3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5 .

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، (P) مستو تمثيله الوسيطى : $\begin{cases} x = -t - 2\lambda + 2 \\ y = 3t + 4\lambda - 3 \\ z = 3t + 4\lambda - 1 \end{cases}$ حيث t و λ عدنان حقيقيان .

(1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

(2) ليكن α عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ، ولتكن (E_α) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cos \alpha - 2y \sin \alpha - z - \frac{3}{4} = 0$$

أ) بيّن أن: من أجل كل α من المجال السابق ، (E_α) هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω_α بدلالة α ونصف قطرها R .

ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (E_α) .

(3) في الحالة التي يكون فيها المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (E_α)

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة ω_α والعمودي على المستوي (P)

واستنتج إحداثيات I نقطة تماس (E_α) مع المستوي (P) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4} + 5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و I ذات

اللواحق : $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = -\frac{3}{2}i$ ، $z_C = -\bar{z}_A$ ، و $z_I = i$.

- (1) اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري .
- (2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .
- (3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .
 أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عيّن نسبته وزاويته.
 ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مرة}}$
 عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.
 (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76; 1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
- II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 (1) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 أ) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،
 ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ وفّر النتيجة بيانيا.
 (2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$.
 (3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 (4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $h(x) = x - \ln x$
 أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x) > 0$ ،
 واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.
 ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)
 (5) لتكن الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.
 - بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ،
 - اعط تفسيراً هندسياً للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصراً له.

انتهى الموضوع الثاني