

العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة		
		التمرين الأول: (04 نقاط)	
04 نقاط	0,25	1. أ - النقط A ، B و C ليست في استقامية لأن $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1) \wedge \overrightarrow{AC}(3;-2;1)$	
	0,5	ب - النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي لأن $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$	
	0,25	ج - من ب - أو $2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ينتج D مرجح $\{(A;2), (B;-1), (C;2)\}$	
	0,25	د - D منتصف $[AE]$ ومنه $E(-1;3;6)$	
	0,25	هـ - $\overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{AD}$ و $D \in (P)$ أو $MA = ME$ ومنه: $x + y - z + 1 = 0$	
	0,5	2. (Γ) هي سطح الكرة ذات المركز D ونصف القطر AD حيث $AD = ED = \sqrt{3}$	
	0,25	3 أ - $F \in (P)$	
	0,25	ب - $[AE]$ و $[GH]$ متعامدتان، متقايستان ومتتاصفتان في D ومنه $AGEH$ مربع.	
	0,25	$s(AGEH) = 2AD^2 = 6ua$	
	0,5	4. أ - (AEH) معين بالشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ ؛ $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{AC}$	
	0,25	ب - $\overrightarrow{DN} = t \cdot \overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{DN}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي $N \in (\Delta)$	
	0,25	ج - $v(t) = \frac{1}{3}DN \times s(AGEH) = 2\sqrt{14}t^2 = 2 t \sqrt{14}uv$	
	0,25	د - $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}}; 4+2\sqrt{\frac{3}{14}}; 5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ ، $N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}}; 4-2\sqrt{\frac{3}{14}}; 5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$	
		التمرين الثاني: (05 نقاط)	
03 نقاط	0,5	1. أ - تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$	
	0,5	ب - $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$ إذا نسبة التشابه المباشر هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$ زاوية له.	
	0,25	2. $z_G = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$	
	0,5	3. أ - $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = -\frac{1}{3}i$	
	0,5	ب - $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ هو عدد تخيلي صرف إذا المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان.	
0,75	ج - $\frac{z_A - z_C}{z_H - z_B} = -i$ وهو تخيلي صرف ومنه $(BH) \perp (AC)$ ؛ بما أن ارتفاعات مثلث تتلاقى في نقطة واحدة فإن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .		

العلامة		عناصر الإجابة	تابع للموضوع الأول
مجموع	مجزأة		
02 نقاط	0,5	4. $\frac{z_H - z_I}{z_H - z_G} = \frac{3}{2}$ وهو حقيقي ومنه $(GH) \parallel (IH)$ إذن النقط G, H و I في استقامية.	
	0,5	5. أ - $z_A + 1 + i = 1 + 2i$ ، إذا $ z_A + 1 + i = \sqrt{5}$ أي $A \in (\Gamma)$.	
	0,25	ب - $z = z_I + \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$ إذن (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.	
	0,25	ج - إنشاء الدائرة (Γ) من المركز I وتمر بالنقطة A .	
	0,5	د - $ z_C - z_I = \sqrt{5}$ ، $ z_B - z_I = \sqrt{5}$ إذن $IB = IC = \sqrt{5}$ أي $B \in (\Gamma)$ و $C \in (\Gamma)$.	
			التمرين الثالث: (04 نقاط)
04 نقاط	0,5	1. أ - من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.	
	0,5	ب - $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$	
	0,25	2. أ - 89 عدد أولي لأنه لا يقبل القسمة على 2، 3، 5، 7 و $11^2 > 89$.	
	0,5	ب - $D_{7832} = \{1, 2, 4, 8, 11; 22; 44, 88; 89, 178, 356, 712, 979, 1958, 3916, 7832\}$	
	0,25	ج - باستعمال خوارزمية إقليدس أو تحليل 981 نجد $PGCD(981, 977) = 1$.	
	0,5	3. $x'^2 - y'^2 = 7832$ و $PGCD(x'; y') = 1$ و $x' - y' \equiv 4[11]$ إذا $(x'; y') = (981; 977)$ ومنه $(x; y) = (1962; 1954)$.	
	0,25	4. أ - باستعمال مبرهنة بيزو، البرهان أن a أولي مع $b \times c$.	
	0,5	ب - باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $PGCD(a; b^n) = 1$.	
	0,75	ج - $pgcd(981^{1954}; 2^8) = 1$ ؛ $pgcd(981^{1954}; 977^{1962}) = 1$ ؛ $pgcd(981^{1954}; 977) = 1$ ؛ من 4. أ. ينتج $pgcd(1962^{1954}; 1954^{1962}) = 2^{1954} pgcd(981^{1954}; 977^{1962} \times 2^8) = 2^{1954}$	
			التمرين الرابع: (07 نقاط)
03,25 نقطة	0,5	1. أ - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(1)$ ، ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.	
	0,25	ب - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0$.	
	0,25	التفسير الهندسي: $(@_f)$ يقبل نصف مماس في $A(0; 1)$ معادلته $y = 1$ و $x \geq 0$.	
	0,25	2. أ - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.	
	0,75	ب - من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'(x) = -x(2 \ln x + 1)$ ، الإشارة + الإشارة	
	0,25	f متزايدة تماماً على $[0; e^{\frac{1}{2}}]$ ومتناقصة تماماً على $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$	
	0,25	جدول تغيرات الدالة f .	
	0,75	3. أ - تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0; +\infty[$.	

العلامة		عناصر الإجابة	تابع للموضوع الأول
مجموع	مجزأة		
03,75 نقطة	0,5	ب - $f(1,532) \approx -0,001$ ؛ $f(1,531) \approx 0,002$ ؛ إذاً $f(1,532) < f(\alpha) < f(1,531)$	
	0,25	أ - الدالة g زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $g(-x) = g(x)$	
	1	ب - إنشاء المنحنى (C_g) على المجال $[-2; 2]$.	
	0,5	5. $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2 \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تتعدم من أجل القيمة 1.	
	0,25	6. أ - $F(t) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 \ln \alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 \right) - \left(t - \frac{1}{3}t^3 \ln t + \frac{1}{9}t^3 \right)$	
	0,25	ب - من $\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}$ ؛ $\ln(t) = \frac{1-f(t)}{t^2}$ ؛ إذاً $F(t) = \frac{-3t f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$	
	0,5	ج - لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ إذاً $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}$	
	0,25	7. أ - القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m) = 2\mathcal{A}$ هي: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}}$	
	0,25	ب - علماً أنّ $3,140 < \pi < 3,142$ و $1,531 < \alpha < 1,532$ نجد: $1,344 < m < 1,346$	
العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة		
04 نقاط			التمرين الأول: (04 نقاط)
	1	1. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن حساب u_1 في كل حالة أو $\frac{1}{2}u_n + 3$ بدلالة n)	
	1	2. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل ($ iz - 1 - i = 3$ معناه $ z - 1 + i = 3$)	
	1	3. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن استعمال خواص الموافقة بترديد 11)	
	1	4. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل (في التمثيل الوسيط يمكن ملاحظة أن الشعاعين مرتبطان خطياً)	
			التمرين الثاني: (05 نقاط)
03,25 نقطة	1,25	1. $z \in \left\{ (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3}); (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \right\}$ معناه $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$	
	0,75	2. أ - $\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5\pi}{6}i} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$	
	0,75	ب - $\arg(z_A) = \frac{7\pi}{12}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = -2\arg(z_A) = -\frac{7\pi}{6}$	
	0,5	ج - $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ و $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	

01,75 نقطة	0,5	3. أ - حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي كل الثنائيات $(2k+1; 7k+3)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
	0,25	ب - $7x=12(1+2y)$ ومنه x مضاعف لـ 12 حسب مبرهنة غوص.
	0,5	ج - حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي: $x=24k+12$ و $y=7k+3$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
	0,5	د - $n=24k+12$ مع $k \in \mathbb{N}$.
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
04 نقاط	0,5	1. $C \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ ومنه $C(3; -2; 1)$
	0,5	2. (Δ_1) و (d) غير متوازيين وغير متقاطعين وعليه فهما ليسا من نفس المستوي
	0,5	3. أ - $\begin{cases} x=3-\alpha-3\beta \\ y=-2+2\alpha+2\beta; (\alpha \in \mathbb{R}); (\beta \in \mathbb{R}) \\ z=1-\alpha+3\beta \end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي $(\mathcal{P})$.
	0,25	ب - استنتاج أن $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.
	0,25	ج - $C \in (\mathcal{P})$ و $\overline{BC}$ عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.
	0,75	4. أ - $I \in (d) \cap (\mathcal{P})$ ومنه $I(1; 0; 2)$ ؛ $D \in (\Delta_2) \cap (IA)$ ومنه $D(0; 0; 4)$.
	0,25	ب - I منتصف $[AD]$ لأن $\overline{IA} = -\overline{ID}$ أو $I\left(\frac{x_A+x_D}{2}; \frac{y_A+y_D}{2}; \frac{z_A+z_D}{2}\right)$
	0,5	5. أ - $(BC) \parallel (KG)$ حسب طاليس في BIC نجد $\frac{IG}{IC} = \frac{1}{3}$ ومنه G مرجح $\{(C;1), (I;2)\}$ وعليه G مرجح $\{(C;1), (A;1), (D;1)\}$ أي G مركز ثقل ACD .
	0,5	ب - $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$
التمرين الرابع (07 نقاط)		
02,50 نقطة	0,25	1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ إذن الدالة f مستمرة على يسار 0.
	0,25	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \lim_{t \rightarrow \infty} te^t = 0$
	0,25	التفسير الهندسي: (e_f) يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الفواصل في المبدأ O .
	0,25	3. أ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
	0,5	ب - لكل $x \in]-\infty; 0[$: $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $f'(x) > 0$
	0,25	f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$.
	0,25	جدول تغيرات الدالة f .
	0,25	4. أ - $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{t} - e^t - \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - e^t = 0$
	0,25	ب - المنحنى (e_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، $y=x$ معادلة له.

العلامة		عناصر الإجابة	تابع للموضوع الثاني
مجموع	مجزأة		
04,50 نقطة	0,25		5. أ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.
	0,5		ب - لكل x من المجال $]-\infty; 0[$: $g'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x}$ ؛ $g'(x) < 0$
	0,25		g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$.
	0,25		جدول تغيرات الدالة g .
	0,25		6. أ - من أجل كل x من $]-\infty; 0[$ ، $0 < g(x) < 1$ معناه $0 < f(x) < 0$
	0,25		ب - $(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ) ؛ $f(0) = 0$ إذا يتقاطعان في المبدأ O .
	0,5		ج - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
	0,75		7. أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.
	0,25		ب - المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_n < f(u_n) < 0$
	0,25		ج - المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذن هي متقاربة نحو ℓ .
	0,25		بما أن f مستمرة على $]-\infty; 0[$ فإن $f(\ell) = \ell$ ومنه $\ell = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
	0,5		8. أ - لكل x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - m = \frac{f(x)}{x} - m$
	0,25		ب - $h'_m(x) = 0$ تكافئ $f(x) = mx$ و $x \neq 0$ إذا كان $m \in]0; 1[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty; 0[$. إذا كان $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ لا تقبل حلا.

ملاحظة: تقبل وتراعى جميع الطرق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط.