

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (06 نقاط)

I)  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،  
النقط  $A, B, C$  و  $E$  التي لاحقاتها:  $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ،  $z_B = -a\sqrt{2}$ ،  $z_C = \overline{z_A}$  و  $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$  على الترتيب.

1. أ- اكتب على الشكل الأسّي العدد المركّب  $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

ب- حدّد طبيعة الرباعي  $OABC$ ، ثم استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر  $S$  ذو المركز  $O$  والنسبة  $\frac{b}{a}$  والزاوية  $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$ ، ثم تحقق أنّ  $S(A) = E$ .

ب- بين أنّ مساحة الرباعي  $OEFG$  هي  $b^2$  (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث  $S(B) = F$  و  $S(C) = G$ .

3. أ- احسب بدلالة  $a$  و  $b$  العبارة:  $\left| z_C \right|^2 + \left| z_E \right|^2 - 2 \left| z_C \times z_E \right| \cos \left[ \arg \left( \frac{z_E}{z_C} \right) \right]$ .

ب- استنتج قيمة  $CE^2$  بدلالة  $a$  و  $b$ .

II)  $n$  عدد طبيعي و  $M_n$  نقطة من المستوي تختلف عن  $O$ ، لاحقتها  $z_n$ .

نضع:  $M_0 = A$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $M_{n+1} = S(M_n)$ .

نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، بـ:  $u_n = |z_n|$  و  $v_n = \arg(z_n)$ .

1. اكتب العدد المركّب  $\frac{z_{n+1}}{z_n}$  على الشكل الأسّي بدلالة  $a$  و  $b$ .

2. نفرض أنّ:  $a < b$  و  $\arg \left( \frac{z_{n+1}}{z_n} \right) \in ]-\pi; \pi]$ .

بين أنّ المتتالية  $(u_n)$  هندسية، والمتتالية  $(v_n)$  حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3. احسب، بدلالة  $a$ ،  $b$  و  $n$  المجموع  $T_n$ ، حيث:  $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$ ، ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .

4. عيّن قيم الأعداد الطبيعية  $n$  التي تكون من أجلها النقط  $O$ ،  $A$  و  $M_n$  في استقامية.

**التمرين الثاني: (03 نقاط)**

1.  $n$  عدد طبيعي . نعتبر العددين الصحيحين  $\alpha$  و  $\beta$  ، حيث :  $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$  و  $\beta = n + 3$  .

أ - بين أن:  $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$  . ( يرمز  $PGCD$  إلى القاسم المشترك الأكبر )

ب - ما هي القيم الممكنة للعدد  $PGCD(\alpha; \beta)$  ؟

ج - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بحيث يكون :  $PGCD(\alpha; \beta) = 5$  .

2. أ - ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $4^n$  على 11.

ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تحقق الجملة التالية :  

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

نعتبر النقط  $A(0; 0; 1)$  ،  $B(2; 2; -1)$  ،  $C(-2; -7; -7)$  و  $D(-3; 4; 4)$

والمستوي  $(\mathcal{P})$  المعرف بالتمثيل الوسيطى :  

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 4 + \alpha + \beta \end{cases}$$
 ؛  $\alpha$  و  $\beta$  وسيطان حقيقيان .

1. أ - بين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا .

ب - تحقق أن الشعاع  $\vec{n}(3; -2; 1)$  ناظمي للمستوي  $(ABC)$  ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له .

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(\mathcal{P})$  ، ثم بين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(\mathcal{P})$  متعامدان .

ب - بين أن تقاطع  $(ABC)$  و  $(\mathcal{P})$  هو المستقيم  $(\Delta)$  ذو التمثيل الوسيطى :  

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

ج - احسب المسافة بين النقط  $D$  والمستوي  $(ABC)$  ، والمسافة بين النقط  $D$  والمستوي  $(\mathcal{P})$  ، ثم استنتج

المسافة بين النقط  $D$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقط  $D$  والعمودي على كل من المستويين  $(ABC)$  و  $(\mathcal{P})$  .

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب - بين أن المستويات الثلاثة  $(ABC)$  ،  $(\mathcal{P})$  و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة  $H$  ، ثم عين إحداثيات  $H$  .

ج - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقط  $D$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

I - 1. الدالة  $u$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$ .

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة  $u$ .

ب - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $e^x - e > 3x - 4$ .

2. الدالة  $v$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$ .

أ - بين أن:  $v'(1) = 0$ . (يرمز  $v'$  إلى الدالة المشتقة للدالة  $v$ )

ب - أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $v(x) \leq 0$ .

ج - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$ .

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ .

II - الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$ .

$(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. احسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

2. بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3. احسب  $f(1)$ ، ثم ممّثل المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  على المجال  $\left]0; \frac{5}{2}\right]$ .

(نأخذ:  $f(2) \approx 2,3$ ،  $f(1,64) \approx 1$ ، و  $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5,75$ ).

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$x = 2$  و  $x = \frac{1}{2}$ .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (03 نقاط)

1. أ - عيّن الأعداد الطبيعية  $n$  التي تحقق:  $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$ .
- ب - عيّن الثنائيات  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية، حيث:  $(b - a)(a + b) = 24$ .
- ج - استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها  $\sqrt{24}$ .
2.  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل  $\alpha = \overline{10141}$  و  $\beta = \overline{3403}$
- أ - اكتب العددين  $\alpha$  و  $\beta$  في النظام العشري.
- ب - عيّن الثنائية  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية حيث: 
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$
3. أ - عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.
- ب - حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة ذات المجهول  $(x, y)$  التالية:  $2013x - 1434y = 27$ .

### التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول  $z$ ، التالية:  $z^2 + z + 1 = 0$ .
2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ النقطة  $A$ ،  $B$  و  $M$  ذات اللاحقات:
$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z \text{ و } z \text{ على الترتيب. (يرمز } \bar{z}_A \text{ إلى مرافق } z_A)$$
- أ - أكتب  $z_A$  على الشكل الأسّي.
- ب - عيّن مجموعة النقط  $M$  من المستوي، حيث:  $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$ .
3. أ - التحويل النقطي  $r$ ، يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z)$ ، حيث:  $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$ .
- ما طبيعة التحويل  $r$ ؟ عيّن عناصره المميزة.
- ب - التحاكي  $h$ ، يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z)$ ، حيث:  $z' = -2z + 3i$ .
- عيّن نسبة ومركز التحاكي  $h$ .
- ج - نضع:  $S = h \circ r$ . (يرمز  $\circ$  إلى تركيب التحويلين  $r$  و  $h$ ).
- عيّن طبيعة التحويل  $S$ ، مبرزاً عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:  $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$ .
4. نعتبر النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $i$  والنقط  $C$ ،  $D$  و  $E$ ؛ حيث:  $S(O) = C$ ،  $S(C) = D$  و  $S(D) = E$ .
- بين أن النقط  $O$ ،  $\Omega$  و  $E$  في استقامة.
5. أ - عيّن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي، حيث:  $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$  مع  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- ب - عيّن  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالتحويل  $S$ .

### التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ النقطتين  $A(-1;0;2)$  و  $B(1;1;1)$

$$\text{والمستقيم } (\Delta) \text{ المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-2 \\ z=-1-\alpha \end{cases} \text{ حيث } (\alpha \in \mathbb{R}).$$

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$ .
- ب - بين أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(\Delta)$  ليسا من نفس المستوي.
2.  $(\mathcal{P})$  المستوي الذي يشمل  $(AB)$  ويوازي  $(\Delta)$ .
- أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(\mathcal{P})$ .
- ب - أثبت أن  $x - y + z - 1 = 0$ ، هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(\mathcal{P})$ .
3. لتكن  $N$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$  و  $M$  نقطة من الفضاء إحداثياتها  $(1+2\beta; 1+\beta; 1-\beta)$  مع  $(\beta \in \mathbb{R})$ .
- أ - بين أن النقطة  $M$  تنتمي إلى المستقيم  $(AB)$ .
- ب - جد إحداثيات النقطتين  $M$  و  $N$  حتى تكون  $M$  المسقط العمودي للنقطة  $N$  على المستوي  $(\mathcal{P})$ .
- ج - تحقق أن المسافة بين  $N$  و  $(\mathcal{P})$  هي  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، ثم احسب مساحة المثلث  $ABN$ .

### التمرين الرابع: (08 نقاط)

- I - الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$ .
1. أ - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
- ب - ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ:  $g(1-\sqrt{2}) \approx -0,25$  و  $g(1+\sqrt{2}) \approx 1,43$ )
2. أ - بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$ ، حيث:  $-0,8 < \alpha < -0,7$ .
- ب - استنتج إشارة  $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .
- II - الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$ .
- $(\mathcal{C}_f)$  منحنى الدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول  $2 \text{ cm}$ )
1. أ - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- ب - بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند  $+\infty$ .
- ج - ادرس وضعية المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .
2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x)$ . (يرمز  $f'$  إلى الدالة المشتقة للدالة  $f$ )
- ب - شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ . (نأخذ:  $f(\alpha) \approx -0,9$ )
3. أ - بين أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
- ب - مثل  $(\Delta)$  والمماسين والمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

ج - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول  $x$ :  $(x+1)^2 + me^x = 0$ .

4. الدالة  $H$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$ .

أ - بين أن  $H$  دالة أصلية للدالة:  $(x+1)^2 e^{-x}$  على  $\mathbb{R}$ .

ب - احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = -1$  و  $x = 0$ .

III -  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = \alpha$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

(تذكر أن العدد  $\alpha$  يحقق  $g(\alpha) = 0$ )

1. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $-1 \leq u_n \leq \alpha$ .

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

3. استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة، ثم احسب نهايتها.