

موضوع البكالوريا في مادة الرياضيات شعبة رياضيات

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الدewan الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2011

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة : رياضيات

المدة: 4 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1/ اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة: z_A ، z_B ، z_C .

2/ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسّر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب/ حدّد طبيعة المثلث ABC .

3/ عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيناً.

4/ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$z' = (-1+i)z + 1-3i$$

أ/ عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

ب/ استنتج طبيعة التحول ToT وعناصره المميزة.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1/ نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ ، $C(-1;1;1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويًا.

ب/ بيّن أنّ الشعاع $(3;4;-2)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ ثم استنتج

معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث: $(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$.

أ/ بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

ب/ عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

ج/ تحقق أنّ النقطة $O(0;0;0)$ لا تنتمي إلى (Δ) .

د/ احسب المسافتين $d(O; (P_1))$ و $d(O; (P_2))$ واستنتج المسافة $d(O; (\Delta))$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = PPCM(U_3, U_5) \\ d = PGCD(U_3, U_5) \end{cases} \text{ حيث: } \begin{cases} U_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1/ عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0

2/ اكتب U_n بدلالة n ، ثم بيّن أن: 2010 حد من حدود (U_n) وعين رتبته.

3/ عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (U_n) يساوي 10080

4/ n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}$

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

$$S_2 = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{2n-1} \text{ و}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) احسب f' ، f'' ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x \text{ حيث: } f', f'', \dots, f^{(n)} \text{ المشتقات المتتالية للدالة } f$$

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$.

ب) بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

ج) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4/ أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^x te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية

للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) \text{ ثم جد } x = \lambda \text{ و } x = -\frac{4}{3}, y = 0 \text{ معادلاتها:}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة: $(E) \quad 13x - 7y = -1 \dots$ حيث: x و y عدنان صحيحان.

حل المعادلة (E).

(2) عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

(3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.

(4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي: $\overline{\alpha 00 \beta 086}$

حيث: α و β عدنان طبيعيان؛ $\alpha \neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C

وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

2- بين أن: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟

3- عين شعاعاً ناظماً $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة له.

4- احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).

5- H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).

(أ) جد إحداثيات النقطة H.

(ب) استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/ أ) الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

(ب) $a^{2011} + \bar{a} = 0$ حيث: $\bar{a}$ مرافق a

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أ) التحويل T الذي كتابته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم

ب) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z - i) = \frac{-\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ للاحقة $1+i$.

3/ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$

$$u_n = -\frac{7}{12} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{3} \quad \text{أ)}$$

ب) (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$

ج) (u_n) متباعدة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

2/ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2}) \ln x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ/ بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

- ارسم (δ) و (C_f) .

3/ أ/ x عدد حقيقي من المجال $[1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t \, dt$

- تحقق أن: $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[1; +\infty[$.

- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

ب/ α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين

الذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \alpha$ ، ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$