



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تقني رياضي

دورة: 2022

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

a و b عدنان طبيعيان حيث $a = 2022$ و $b = 124$

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين a و b على 7

(2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

(3) بيّن أنّ العدد $4 + a^n + b^n$ يقبل القسمة على 7

(4) نضع، من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$

- بيّن أنّ $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n \pmod{7}$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A_n + 1$ مضاعفا للعدد 7

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة مما يلي:

(1) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $n(n^2 - 1)$ مضاعف للعدد 3

(2) الدالة العددية $x \mapsto x^2 + 2x + x \ln x$ حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' = 2 + \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$

(3) المستقيم ذو المعادلة $y = x + e$ مماس لمنحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (x - 2)e^x$

(4) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln \frac{ne^n}{n+1}$

عبارة المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ هي: $S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_1 = 2$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n - \frac{1}{n+1}$ و $v_n = n u_n + 2$

(1) أحسب u_2 و u_3

(2) أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n}$

أحسب، بدلالة n ، المجموع S'_n حيث $S'_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{ cm}$

(1) أ- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة كل من $\ln x$ و $\frac{x-1}{x}$

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $\frac{x-1}{x} + \ln x$

(2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x - 2 + \ln x$

أ- بين أن الدالة h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب- برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$ ثم بين أن $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

ج- بين أن $y = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} x$ معادلة $\perp (T)$ مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α

(4) أنشئ (T) و (C_f) على $]0; 4[$ (نأخذ $\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} \approx 0,8$)

(5) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$

ب- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $f(x) - x$

(6) K الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $K(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $K'(x) = f(x) - x$

ب- أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$

(7) g الدالة المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1)\ln(x+2)$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2; +\infty[$ ، $g(x) = f(x+2) - 1$ ،

- استنتج أن (C_g) صورة (C_f) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه. (لا يُطلب إنشاء (C_g))

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a = 5n + 2$ ، $b = n + 1$ ، $c = 9n + 2$

$$d = \text{pgcd}(a; b) \text{ و } d' = \text{pgcd}(b; c)$$

(1) عيّن القيم الممكنة لكل من d و d' ثم استنتج $\text{pgcd}(a; b; c)$

(2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

(3) نعتبر المعادلة: $(E) \dots 17x - 4y = 29$ حيث x و y عددان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة (E)

(4) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy < 279$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية مع التبرير.

(1) مجموعة حلول المعادلة $e^{(\ln x)^2 - 6} = x$ ذات المجهول الحقيقي x في المجال $]0; +\infty[$ هي:

$$S = \{e^3\} \quad (\text{أ}) \quad S = \{-2; 3\} \quad (\text{ب}) \quad S = \{e^{-2}; e^3\} \quad (\text{ج})$$

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^{2023} على 7 هو:

$$2 \quad (\text{أ}) \quad 3 \quad (\text{ب}) \quad 5 \quad (\text{ج})$$

(3) العدد الحقيقي $\int_0^{\ln 4043} \frac{1}{1+e^{-x}} dx$ يساوي :

$$2022 \quad (\text{أ}) \quad \ln 2022 \quad (\text{ب}) \quad \ln 4043 \quad (\text{ج})$$

(4) الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $F(x) = (x+2)\sqrt{x}$

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$. عبارة الدالة f هي :

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x} \quad (\text{أ}) \quad f(x) = \frac{3x+2}{2x}\sqrt{x} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \frac{2x+3}{2x}\sqrt{x} \quad (\text{ج})$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n > -2$

(2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّ (u_n) متقاربة .

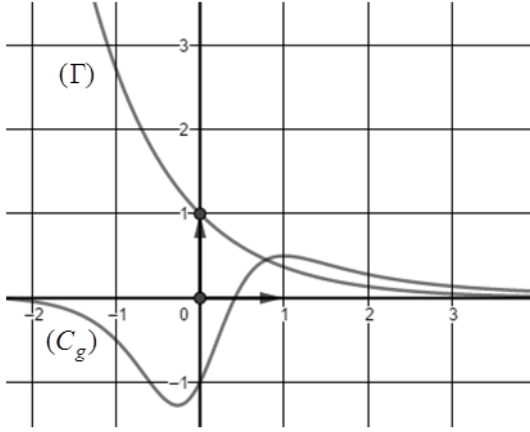
(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_n}$

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أكتب v_n بدلالة n

ب- أحسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ب- أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(Gamma) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{-x}$ و (C_g) التمثيل

البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$

α فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (C_g)

(كما هو مبين في الشكل المقابل)

(1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x) - e^{-x}$

(2) تحقّق حسابيا أنّ $0,7 < \alpha < 0,8$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-x} - \frac{x+1}{x^2+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x) - e^{-x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - e^{-x}]$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنين (Γ) و (C_f)

(4) أ- أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

ب- أنشئ (T) و (Γ) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.6$)

ج- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) - m = 0$

(5) علما أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; 0]$: $\frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{5}{4(1-x)}$

أ- عيّن حصرا للعدد I حيث: $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 1}$

ب- أحسب J حيث: $J = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ ثم استنتج حصرا لـ A ، مساحة الحيز المستوي المحدّد

بالمنحنين (Γ) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 0$ و $x = -1$