



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0; -1; 2)$ ، $B(3; 2; 5)$ ، $C(3; -1; -1)$ و $D(-3; 5; -1)$.

ليكن (P) و (Q) المستويين اللذان معادلتاهما على الترتيب: $x + y + z - 1 = 0$ و $x - z + 2 = 0$.

(1) بين أن المثلث ABC قائم، ثم عيّن معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(2) أ) بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان ثم جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ، تقاطع المستويين (P) و (Q) .

ب) عيّن تقاطع المستويات (P) ، (Q) و (ABC) .

(3) تحقّق أن A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

(4) بين أن $\frac{\pi}{4}$ قياس بالراديان للزاوية $\hat{BDC}$ ، ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

(2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

(3) برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5.

(4) عيّن الأعداد الطبيعية n حتّى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $(z - 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .



(2) أ) عيّن لاحقة النّقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب) عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $z_n = (z_B)^n + (z_C)^n$.

أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$.

- عبّر عن t_n بدلالة n ثمّ احسب P_n بدلالة n حيث $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2 - \ln x}{x^2}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71 < \alpha < 1,72$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{-1 + \ln x}{x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

(3) " نقبل أنّ $f(\alpha) \approx 0,87$ و $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ حيث $0,76 < \beta < 0,78$ و $4,19 < \gamma < 4,22$."

- أنشئ في المعلم السابق المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

(4) ليكن λ عدد حقيقي حيث $1 < \lambda \leq e$ ، نرمز بـ $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)

والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \lambda$.

أ) احسب $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة λ .

ب) عيّن قيمة λ حيث $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{2}\text{cm}^2$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;1;-1)$ ، $B(1;7;-3)$ و $I(0;1;-2)$ والشعاع $\vec{v}(2;0;2)$ ، (Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{v}$ شعاع توجيه له و (Δ_2) المستقيم المعروف

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{بالتمثيل الوسيط}$$

(1) بين أن A تنتمي إلى المستقيم (Δ_2) و أن (Δ_1) و (Δ_2) غير متطابقين.

(2) ليكن (P) المستوي المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + 2\beta \\ y = 1 - \alpha \\ z = -1 - 4\alpha + 2\beta \end{cases} \quad \text{تمثيل وسيطي للمستوي } (P). \quad \text{بين أن الجملة: } (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$$

(3) أثبت أن I هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

(4) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 14y + 6z + 21 = 0$.

(أ) بين أن (S) سطح كرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

(ب) تحقق أن المستوي (P) يمس (S) في نقطة يطلب تعيينها.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_1 = \frac{1}{a}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an} u_n$ ، حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2.

(1) (أ) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an} u_n$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وعين حدّها الأول v_1 بدلالة a .

(ب) جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث $S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n$.

ثم عين قيمة a حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2016}$.



التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.
- (II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A, B, C التي لاحتقاتها $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، و $z_C = \bar{z}_B$.
- (1) بين أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.
- (2) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$.
- ب) بين أن: $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan \frac{\pi}{12}$.
- (3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعروف بـ: $z' = (z - z_B)L + z_B$.
- بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.
- (4) لتكن النقط A', B', C' و صور النقط A, B, C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.
- احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)(1+2e^{-x})$.
- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.
- (1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) أ) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ ثم استنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) .
- ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (3) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
- (4) باستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.
- (5) ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $\mathcal{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب: $y = x + 1$ ، $x = -1$ و $x = \alpha$.
- احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α ثم $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.