

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

- 1- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 11.
- 2- ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟
- 3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.
- 4- عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

- 1- عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث:
$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$$
- 2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و Ω التي لاحتقاتها على الترتيب z_A, z_B, z_Ω حيث: $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1 - 2i$.
 (أ) أثبت أن: $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.
 (ب) عيّن طبيعة المثلث ΩAB .
 3- h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.
 (أ) عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h .
 (ب) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .
 (ج) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.
 (د) بيّن أن $ABCD$ مربع.
 4- (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = 4\sqrt{5}$
 (أ) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E) ، ثم عيّن طبيعة (E) وعناصرها المميزة.
 (ب) أنشئ المجموعة (E) .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59 < \alpha < 1,60$.

3- استنتج إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$). (وحدة الطول $2cm$).

1- بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3- أ) بيّن أن: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعروف في السؤال 2 من الجزء I.

ب) استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج) ارسم (C_f).

4- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$.

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين الرابع: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

(P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(2; -5; 2)$ و $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي له.

(Q) المستوي الذي: $x + 2y - 2 = 0$ معادلة له.

1- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

3- عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ)، تقاطع المستويين (P) و (Q).

4- أ) احسب d_1 المسافة بين النقطة $K(3; 3; 3)$ والمستوي (P) و d_2 المسافة بين النقطة K والمستوي (Q).

ب) استنتج d المسافة بين النقطة K والمستقيم (Δ).

5- احسب المسافة d بطريقة ثانية.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :

$$(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$$

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3} , z_B = \sqrt{3} - i , z_A = \sqrt{3} + i$$

أ) اكتب كلا من z_D و z_C ، z_B ، z_A على الشكل الأسّي.

ب) تحقق أن: $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

3- العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعروف بـ: $L_n = z_D \times z_n$.

أ) اكتب كلا من L_1 ، L_0 على الشكل الجبري.

ب) (U_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $U_n = |L_n|$

- أثبت أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب.

احسب، بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = \|OM_0\| + \|OM_1\| + \dots + \|OM_n\|$.

- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الثاني: (03.5 نقاط)

نسمى (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3 [15] \\ x \equiv 6 [7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$.

1- بين أن العدد 153 حل للجملة (S) .

2- إذا كان x_0 حلاً لـ (S) ، بين أن: $(x \text{ حل لـ } (S))$ يكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0 [15] \\ x - x_0 \equiv 0 [7] \end{cases} \right)$

3- حل الجملة (S) .

4- يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبة تتسع لـ 15 كتاباً بقي لديه 3 كتب، وإذا

استعمل علبة تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاباً، ما عدد هذه الكتب ؟

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (P) المستوي الذي:

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \text{تمثيل وسيطي له.}$$

- 1- تحقق أن المستقيم (D) محتوي في المستوي (P) .
- 2- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.
ب) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .
- 3- بيّن أن: $3x - 4z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ) .
- 4- $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء.
أ) احسب المسافة بين النقطة M وكل من (P) و (Q) .
ب) أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{5- عين مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- g هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b \ln(x)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.
1- عيّن a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1; -1)$ مماسا معامل توجيهه 4.
2- نضع $a = -2$ و $b = 2$.
أ) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
ب) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
- II- f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$
أ) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm).
1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
ج) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .
2- أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
ب) بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، ثم جد معادلة له.
ج) نأخذ $\alpha = 1,25$. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث:
 $0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$ ، ثم ارسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f) .
3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2 \ln(x) = 0$.