

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3 + (2-4i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) = 0 \quad \dots (*)$$

1/ بين أن $Z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة (*)

2/ حل، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (*) ثم اكتب حلولها Z_0, Z_1, Z_2 على الشكل الأسّي حيث $|Z_1| < |Z_2|$.

3/ لتكن A, B, C صور الحلول Z_0, Z_1, Z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. عين النقطة G مرجع الجملة $\{(A,1); (B,1); (C,-1)\}$.

4/ عين المجموعة (E) للنقطة M حيث : $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E) .

5/ تحقق أن النقطة O, B و G في استقامة ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه

النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

تمرين 2: (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1,2,2), B(3,2,1), C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A, B, C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بين أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

3/ بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

4/ بين أن الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) .

5/ استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) هو الجملة:

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

حيث $(k \in \mathbb{R})$

6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ، أوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان $\overline{AM}$ و $\overline{u}$ متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) .

تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$

ب- أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

2/ نعرف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ - برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2
ب - مثل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغير (U_n) و تقاربها انطلاقاً من التمثيل السابق.

3/ أ - برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

ب - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $U_{n+1} > U_n$.
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج - تحقق أن : $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2} (U_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

عَيِّن عدداً حقيقياً k من $]0;1[$ بحيث : $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

بَيِّن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

تمرين 4: (4 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a = n-2$ و $b = 2n+3$

أ - ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب - بَيِّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفاً للعدد 7.

ج - عَيِّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$$p = 2n^2 - 7n - 15 \text{ و } q = n^2 - 7n + 10$$

أ - بَيِّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

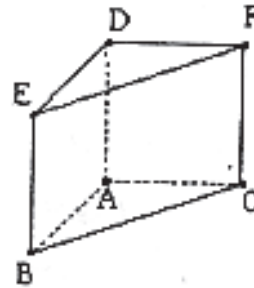
ب - عَيِّن تبعاً لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

التمرين الأول: (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) $4x - 9y = 319$.
- (1) - تأكد أن الثنائية $(1, 82)$ حل للمعادلة (I).
- حل المعادلة (I).
(2) عين الثنائيات (a, b) الصحيحة، حلول المعادلة : (II) $4a^2 - 9b^2 = 319$
(3) استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

$ABCDEF$ منشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتمساوي الساقين وجهاء $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $r \in \mathbb{R}^+$.
(انظر الشكل)



- (1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$. بين أن G مرجح الجملة $\{(A;2), (B;1), (C;1), (D;2), (E;1), (F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$
- (2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس $(A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$.
- عين إحداثيات النقط F, E, D, C, B, A .
- عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 = 10r^2$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كفي.
- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :
$$z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسّي.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتا الحلين.
عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1 (f الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يأتي: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$.

C_f منحنى f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(وحدة الأطوال $2cm$)

أ - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب - ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى C_f ثم ارسم C_f و (D) .

د - بين أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2 (نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ - باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (Ox) .

ب - خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n) متزايدة .

د - استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.