

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط:

$A(-1; 1; 3)$ ، $B(1; 0; -1)$ ، $C(2; -1; 1)$ ، $D(2; 0; -1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y + z + 1 = 0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له:
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$
 حيث β وسيط حقيقي.

- 1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوي في المستوي (P) .
- 2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.
- 3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P) .
- ب) بين أن D نقطة من (P) ، و أن المثلث BCD قائم.
- 4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I (المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

II (المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) بين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \dots\dots\dots(I)$$
 حيث α وسيط حقيقي.

(2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ؛ نرسم إلى حلي المعادلة (I) z_1 و z_2 . يبين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

(3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ؛ $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.
 أ) أنشئ النقط A ، B و C .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$ ، ثم أنشئ G .

د) احسب لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

(2) احسب $f'(x)$. يبين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) يبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) تحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم يبين أن: $2f'(\alpha) = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) $z^2 + 4z + 13 = 0$

(1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

(2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. S التشابه المباشر

الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

(أ) بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

(ب) احسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

(3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

(أ) بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

(ب) احسب z_D لاحقة النقطة D .

(ج) بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على

المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) (أ) أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

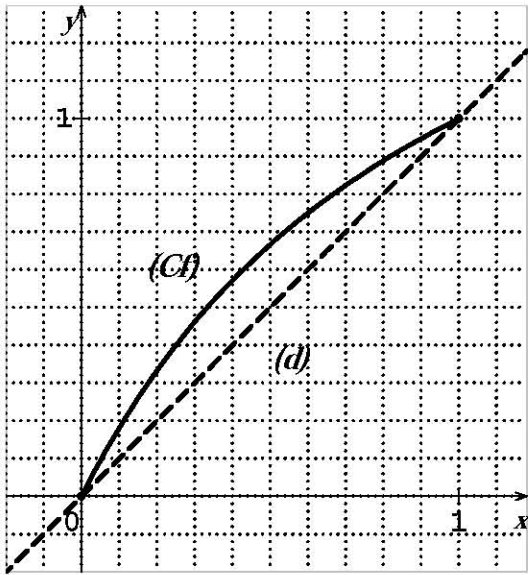
(ب) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

(ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

(ب) احسب نهاية (u_n) .



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(2; 1; -1)$ ، $B(1; -1; 3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2}; -2; 1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2}; -3; 0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.
(1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بين أن: $2x + 4y - 8z + 5 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

(2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1; 2; -4)$ شعاع توجيه له.

(3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب) بين أن (AB) و (Δ) من نفس المستوى، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم.

(4) أ) بين أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.