

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03.5 نقطة)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

(2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ ؛ $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسّي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) أ) n عدد طبيعي. عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط : $C(2;1;3)$ ، $B(0;2;1)$ ، $A(1;0;2)$

(1) (P) مستو معادلة له من الشكل $x - z + 1 = 0$.

(أ) بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

(ب) ما طبيعة المثلث ABC .

(2) (أ) تحقّق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .

(ب) ما طبيعة $ABCD$.

(3) (أ) أحسب المسافة بين D والمستوي (ABC) .

(ب) أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

(I) f دالة معرفة على $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$ بـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) (أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

(2) g دالة معرفة المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد وتجانس.

(أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

(ب) تحقّق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ)

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات g .

(II) k دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) (أ) أحسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

(3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط:
- $A(2; 3; -1) ; B(1; -2; 4) ; C(3; 0; -2) ; D(1; -1; -2)$
- و ليكن (π) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية: $2x - y + 2z + 1 = 0$
- المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:
1. النقط A ، B ، C في استقامية.
 2. (ABD) مستوي معادلة ديكارتية له: $25x - 6y - z - 33 = 0$
 3. المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .
 4. المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1; 1; -1)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$
 2. نسمي $z_1 ; z_2$ حلي هذه المعادلة.
- (أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.
- (ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:
- $$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) ; z_B = 1 + i\sqrt{3} ; z_A = 1 - i\sqrt{3}$$
- (i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$)
- أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
- (د) أحسب z^3 و z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث:
- $$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$
1. (أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1 .
 - (ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
 - (جـ) أحسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:
- $$S_n = 728$$

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

(أ) أحسب v_2 و v_3 .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ج) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول:

h دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: لتكن f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

(ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

(ج) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم (C_f) .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad ; \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1$$